Libyan Open University Journal of Applied Sciences (LOUJAS)
Volume 2 - Issue 1 - 2026 - Pages 465-474

“A Study of Some Methods for Solving First-Order Linear and Nonlinear Partial Differential Equations”

Turkiya A. Aljamal*
Mathematics Department, College of Education, Bani Waleed University, Libya
*** Email (for reference researcher):** turkiaaljamal@bwu.edu.ly

دراسة بعض الطرق لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية وغير الخطية من الرتبة الاولي

تركية الهادي الجمل *
قسم الرياضيات، كلية التربية، جامعة بني وليد، ليبيا

Received: 20-02-2026; Accepted: 10-05-2026; Published: 20-05-2026

Abstract
This research addresses the most important analytical methods for solving first-order partial differential equations. Lagrange’s method is based on transforming a linear partial differential equation into a system of ordinary differential equations through characteristic relations, which facilitates the determination of the general solution.The Cauchy problem, on the other hand, is concerned with finding the solution of a partial differential equation subject to given initial conditions on a curve or a surface. It is widely used in physical applications to establish the existence and uniqueness of solutions.In contrast, Charpit’s method is considered an extension of Lagrange’s method, specifically applied to solving first-order nonlinear partial differential equations. This method transforms the equation into a differential system that assists in obtaining the necessary integrals required to derive the general solution.These methods demonstrate significant importance in simplifying complex equations and transforming them into forms that can be handled mathematically with greater efficiency.

Keywords*:* First-order partial differential equation, Lagrange partial differential equation, Cauchy method of characteristics, Charpit’s method.

الملخص
يتناول هذا البحث أهم الطرق التحليلية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الأولى، حيث تعتمد طريقة لاكرانج على تحويل المعادلة الخطية إلى نظام من المعادلات التفاضلية العادية باستخدام علاقات الخصائص، مما يسهل إيجاد الحل العام. أما مشكلة كوشي فهي تهتم بإيجاد حل المعادلة التفاضلية الجزئية مع شروط ابتدائية معلومة على منحنى أو سطح، وتُستخدم بشكل واسع في التطبيقات الفيزيائية لتحديد وجود ووحدانية الحل في المقابل، تُعد طريقة شاربيت امتدادًا لطريقة لاكرانج ولكنها تُستخدم لحل المعادلات غير الخطية من الرتبة الأولى، حيث يتم تحويلها إلى نظام تفاضلي يساعد في إيجاد التكاملات اللازمة للحصول على الحل العام. وتُظهر هذه الطرق أهمية كبيرة في تبسيط المعادلات المعقدة وتحويلها إلى صور يمكن التعامل معها رياضياً .

الكلمات المفتاحية: المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الأولى ، معادلة لاكرانج التفاضلية الجزئية , طريقة المميزات لكوشي ، طريقة جاربت.

المقدمة
تعتبر المعادلات التفاضلية الجزئية من الأدوات الرياضية الأساسية التي تستخدم في وصف العديد من الظواهر الطبيعية والهندسية مثل انتقال الحرارة, وحركة الموائع وانتشار الموجات (هب الريح، 2004) .و تزداد أهمية هذة المعادلات عندما تكون من الرتبة الاولي, حيث يمكن حلها بطرق تحليلية مختلفة ومازالت المعادلات التفاضلية الجزئية من عهد نيوتن تستخدم في فهم العلوم (رانفيل وبيدبنت، 1992),بالاضافة الي مساهمتها في التحليل الرياضي وامتدت استخداماتها في جميع مجالات العلوم وتطبيقاتها, وأن طرق حلها مختلفة تعتمد تحويلها إلي أنظمة أبسط تُعرف بمعادلات الخصائص (صالح وآخرون، 2010). ومن بين أهم هذة الطرق :طريقة لاكرانج, ومشكلة كوشي , وطريقة شاربت والتي تلعب دورًا مهمًا في إيجاد الحلول العامة أو الخاصة لهذه المعادلات سواء كانت خطية أ غير خطية (Trim, 1990)

تعريفات ومصطلحات هامة

المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الأولى

هي المعادلة التي تكون صورتها العامة في المتغيرين المستقلين x,y والمتغير التابع Z كما يلي (بوقفة والهنادوة,2001):

$$f(x,y,z,p,q)=0 \qquad (1)$$

حيث f ليست بالضرورة خطية في p,q و $p=\frac{\partial z}{\partial x}\,,q=\frac{\partial z}{\partial y}$

ويمكن تصنيف ثلاثة فئات من الحلول للمعادلة التفاضلية (1)

1- منظومة سطوح ذات وسيطين:

$$f(x,y,z,a,b)=0$$

ويسمى بالحل التام للمعادلة التفاضلية (1)

2- منظومة سطوح ذات وسيط واحد:

$$f(x,y,z,\varphi,(a))=0$$

حيث $\varphi(a)$ دالة اختيارية ويسمى بالحل العام للمعادلة (1) وعندما تكون $\varphi(a)$ محددة فإنه يمكن الحصول على حالة خاصة من الحل العام وضرف الحل العام يكون حلا خاصا للمعادلة (1).

3- **الحل المفرد :**

اذا كان ظرف الحل التام موجود فإنه يكون الحل أو التكامل المفرد للمعادلة(1).

المعادلات التفاضلية الجزئية المتكافئة

يقال عن المعادلتين $g(x,y,z,p,q)=0\;,$ $f(x,y,z,p,q)=0$ أنهما متكافئتان إذا تحقق الشرط (جهيمة ووهب الريح1993):

$$[\mathrm{f},\mathrm{g}]=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,p)}+\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,q)}+p\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,p)}+q\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,q)}=0$$

توجد عدة طرق لإيجاد الحل التام للمعادلات التفاضلية الجزئية ومن أهمها

1- معادلة لاكرانج التفاضلية الجزئية

معادلة لاكرانج التفاضلية الجزئية: هي معادلة تفاضلية جزئية خطية من الرتبة الأولى وتكون خطية على الأقل في المشتقات الجزئية وليس الضرورة خطية في المتغير المعتمد، وتكتب معادلة لاكرانج التفاضلية الجزئية بالصيغة التالية:

$$\mathcal{P}(x,y,z)z_x+Q(x,y,z)z_y=R(x,y,z) \qquad (2)$$

حيث $\mathcal{P},Q,R$ هي دوال في المتغير المعتمد (z) والمتغيرات المستقلة

$$z(x,y)=z \text{ و } y,x$$

طريقة لاكرانج: وهي طريقة لحل معادلة لاكرانج التفاضلية (2) ويتم فيها تحويل معادلة (2) الى معادلتين تفاضليتين اعتياديتين بحيث يسهل حلها والتعامل معها، وبحلها سوف نحصل على الحل العام لمعادلة(2).

الخطوات الأساسية لحل معادلة لاكرانج التفاضلية الجزئية

1- نكتب معادلتي لاكرانج المساعدة(التابعتين)من المعادلة التفاضلية الجزئية (المراد حلها)وكما يلي (Hilal & 2014 Elzaki):

$$\frac{dx}{\mathcal{P}}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$$

2- نجد حلين مستقلين لمعادلات لاكرانج المساعدة ويتمثلان بالصيغ التالية:

$$u=u(x,y,z)=a,\quad v=v(x,y,z)=b$$

حيث a , b ثوابت اختيارية واحدهم على الأقل يحوي z .

3- نكتب الحل العام لمعادلة لاكرانج التفاضلية الجزئية (معادلة(2)) وذلك باستخدام الحلين المستقلين أعلاه وتعويضهم بالصيغة التالية:

$$\phi(u,v)=0$$

حيثϕهي دالة اختيارية، أيضا بالإمكان كتابة الحل العام كما في الصيغ التالية

$$v=\phi(u)or\ \phi(v)=u$$

بعض الاساليب لحل معادلة لاكرانج التفاضلية الجزئية :

اذا كانت لدينا معادلات لاكرانج المساعدة والمعطاة بالصيغة التالية:

$$\frac{dx}{\mathcal{P}}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \qquad (3)$$

Libyan Open University Journal of Applied Sciences (LOUJAS)
Volume 2 - Issue 1 - 2026 - Pages 465-474

فانه بالإمكان استخدام خصائص الكسور التالية للحصول على حل المعادلة(3) :
اولا: اذا كان متوفرة سوف نحصل على(5)

$$A\mathcal{P} + BQ + CR = 0 \qquad (4)$$
$$Adx + Bdy + Cdz = 0 \qquad (5)$$

حيثA,B,C ثوابت او متغيرات بالنسبة ل x,y,z وقد تاخذ الإشارة + او - وهذا يعتمد على ما يتطلبه اسلوب حل المعادلة (3)
ثانيا: يمكن استخدام الخاصية التالية:

$$\frac{Adx + Bdy + Cdz}{A\mathcal{P} + BQ + CR} = Eq(3) \qquad (6)$$

في هذه الخاصية يمكن استخدام احدى النسب في (3) في معادلة (6) وهذا ما يطلبة اسلوب حلالمعادلة(3)
ثالثا: نسبة مجموع اي بسطي في المعادلة (3) الى مجموع مقاميهما يساوي النسبة الثالثة.
مثلا:

$$\frac{Adx + Bdy}{A\mathcal{P} + BQ} = \frac{Cdz}{CR} \qquad (7)$$

مثال 1:
استخدم طريقة لاكرانج لحل المعادلة التفاضلية التالية:

$$xp + yq = 2z$$

الحل:

$$\therefore P = x, \quad Q = y, \qquad R = 2z$$
$$\because \frac{dx}{\mathcal{P}} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}, \qquad \therefore \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z} \quad ,$$
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow Ln(x) = Ln(y) + Ln(a) \Rightarrow Ln\left(\frac{x}{y}\right) = Ln(a) \Rightarrow \frac{x}{y} = a,$$
$$a = u(x, y, z),$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z} \Rightarrow 2\mathrm{Ln(y)} = \mathrm{Ln(z)} + \mathrm{Ln(b)}\left(\frac{y^2}{z}\right) = Ln(b) \Rightarrow \frac{y^2}{z} = b,$$
$$b = v(x, y, z)$$

نستنتج من قيم a ,b (المستخرجة أعلاه)الحل العام الذي يمكن كتابته بالصورة التالية:

$$\therefore \phi(a, b) = \phi(u, v) = 0,$$

حيثϕ هي دالة اختيارية ،اذن الحل العام لمعادلة السؤال هو:

$$z = \frac{1}{y^2}\phi(\frac{x}{y}) \text{ او } \phi\left(\frac{x}{y}, \frac{y^2}{z}\right) = 0$$

2-طريقة المميزات لكوشي:

تستخدم هذه الطريقة لحل المعادلة التفاضلية غير الخطية على الصورة التالية(Petrovski& Silverman, 1973):

$$f(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = 0 \qquad (8)$$

التي تكتب أيضا على الصورة:

$$f(x, y, z, p, q) = 0; p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \qquad (9)$$

أي فئة من الدوال الخمسة :

$$\{x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)\}$$

تحقق المعادلة

$$z'(t) = p(t)x'(t) + q(t)y'(t)$$

تعرف قطاع عند النقطة(x, y, z) على المنحنى C الذي معادلته الوسيطية

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

لكل قيمt على فترة ملائمه ولتكن I،واذا كان عند كل نقطة المنحنىC يمس المخروط الابتدائي فان القطاع المناظر يكون قطاعا مميزا. ويمكن اشتقاق معادلات القطاع المميز كما يلي:
التفاضل الكلي لـــz يكون:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

أو

$$dz = pdx + qdy \qquad (10)$$

حيث p , q تحقق المعادلة (9) وبتفاضل المعادلة (10)بالنسبة لــ p:

$$0 = dx + \frac{dq}{dp}dy \ \Rightarrow \frac{dq}{dp} = -\frac{dx}{dy} \qquad (11)$$

وبتفاضل المعادلة (9) بالنسبة لــ p:

$$f_p + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{dq}{dp} = 0 \quad \Rightarrow \frac{dq}{dp} = -\frac{f_p}{f_q} \qquad (12)$$

وهذا يتضمن:

$$\frac{dx}{f_q} = \frac{dy}{f_q} \quad \Rightarrow dx = \frac{f_p}{f_q}dy \qquad (13)$$

وبالتعويض عنdx في المعادلة (10)نجد أن:

$$dz = p\frac{f_p}{f_q}dy + qdy \qquad \Rightarrow dz = \left(\frac{pf_p + qf_q}{f_q}\right)dy$$

أي أن:

$$\frac{dz}{pf_p + qf_q} = \frac{dy}{f_p} \qquad (14)$$

من المعادلتين (13)،(14) واضح أن:

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{f_q} = \frac{dz}{pf_p + qf_p} \qquad (15)$$

لذلك على استطالة القطاع المميز المشتقات$z'(t)$ ،$y'(t)$ ،$x'(t)$ يجب أن تكون متناسبة مع f_p, f_q $pf_p + qf_q$ على التوالي .

وإذا اخترنا الوسيط t على الصورة التالية:

$$x'(t) = f_p \qquad , y'(t) = f_q \qquad (16)$$

فإن

$$z'(t) = pf_p + qf_q \qquad (17)$$

على استطالة القطاع المميزpتكون دالة في tوهكذا

$$p'(t) = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

من المعادلتين في (16) نجد أن:

$$p'(t) = \frac{\partial p}{\partial x}f_q + \frac{\partial p}{\partial y}f_q$$

ولكن

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(q)$$

وهكذا

$$p'(t) = \frac{\partial p}{\partial x}f_p + \frac{\partial q}{\partial x}f_q \qquad (18)$$

ويتفاضل المعادلة (9) بالنسبة لـ x:

$$f_x + pf_z + f_p\frac{\partial p}{\partial x} + f_q\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

او

$$f_p\frac{\partial p}{\partial x} + f_q\frac{\partial q}{\partial x} = -(f_x + pf_z) \qquad (19)$$

من المعادلتين (18) (19) نجد أن:

$$p'(t) = -(f_x + pf_z) \qquad (20)$$

وبالمثل:

$$q'(t) = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

من المعادلتين في (16) نجد أن :

$$q'(t) = \frac{\partial q}{\partial x} f_p + \frac{\partial q}{\partial y} f_q$$

ولكن

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(p)$$

وهكذا

$$q'(t) = \frac{\partial p}{\partial y} f_p + \frac{\partial q}{\partial y} f_q \qquad (21)$$

وبتفاضل المعادلة التفاضلية(9) بالنسبة لـــــ y

$$f_y + q f_z + f_p \frac{\partial p}{\partial y} + f_q \frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

او

$$f_p \frac{\partial p}{\partial y} + f_q \frac{\partial q}{\partial y} = -\left(f_y + q f_z\right) \qquad (22)$$

من المعادلتين(21) ، (22) نجد ان:

$$q'(t) = -\left(f_y + q f_z\right) \qquad (23)$$

وبذلك تحصل على منظومة المعادلات التفاضلية العادية التي تحدد القطاع المميز للمعادلة (9):

$$x'(t) = f_p \;\; , y'(t) = f_q \;\; , z'(t) = p f_p + q f_q$$
$$p'(t) = -(f_x + q f_z) \quad , q'(t) = -\left(f_y + q f_z\right)$$

طريقه الحل

لإيجاد حل المعادلة التفاضلية (8) الذي يمر خلال المنحنى C تتبع الآتي:

1- كتابة المعادلة على الصورة: $f(x, y, z, p, q) = 0$

2- إيجاد معادلات القطاع المميز

$$x'(t) = f_p \;\; , y'(t) = f_q \;\; , z'(t) = p f_p + q f_q$$
$$p'(t) = -(f_x + q f_z) \quad , \quad q'(t) = -\left(f_y + q f_z\right)$$

3- إيجاد الشروط الابتدائية كما يلي

أ- كتابة معادلة المنحنى الابتدائي وسيطيا:

$$x_0 = x_0(v) \quad , y_0 = y_0(v) \quad , z_0 = z_0(v)$$

ب- القيمتان الابتدائيتان p_0 , q_0 يمكن تحديدهما من المعادلتين

$$\frac{dz_0}{dv} = p_0 \frac{dx_0}{dv} + q_0 \frac{dy_0}{dv}$$
$$\mathrm{f}\{x_0(v), y_0(v), z_0(v), p_0, q_0\} = 0$$

4- تكامل معادلات القطاع المميز وإيجاد p, q, x, y بدلالة t, v

5- التعويض عن x, y, p, q في المعادلة:

$$\frac{dz}{dt} = p f_p + q f_q$$

وتكامل هذه المعادلة يعطي $z = z(v, t)$

6- بحذف t, v من المعادلات

$$x = x(v, t) \quad , \quad y = y(v, t) \qquad , \qquad z = z(v, t)$$

نحصل على العلاقة $\varphi(x, y, z) = 0$ وهي معادلة السطح التكاملي للمعادلة(8) خلال المنحنىC.

ولتوضيح الطريقة نأخذ المثال التالي:

مثال :

أوجد المعادلات المميزة للمعادلة$z = p^2 - q^2$وأوجد السطح التكاملي الذي يمر بالقطاع المكافئ

$$4z + x^2 = 0 \;\; , y = 0$$

الحل

أولًا: معادلات القطاع المميز:

بوضع: $f(x,y,z,p,q) = z - p^2 + q^2 = 0$ ومنها:

$$\frac{dx}{dt} = f_p = -2p \quad , \frac{dy}{dt} = f_q = 2q$$

$$\frac{dz}{dt} = pf_p + qf_q = -2(p^2 - q^2) = -2z$$

$$\frac{dp}{dt} = -(f_x + pf_z) = -p$$

$$\frac{dq}{dt} = -(f_y + qf_z) = -q$$

ثانياً: الشروط الابتدائية

المعادلات البارامترية أو الوسيطية للقطاع المكافئ هي:

$$z_0 = -v^2 \quad , y_0 = 0 \quad , x_0 = 2v$$

ويمكن تحديد p_0 , q_0 من المعادلتين التاليتين:

$$\frac{dz_0}{dv} = p_0 \frac{dx_0}{dv} + q_0 \frac{dy_0}{dv}$$

$$f(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = z_0 - {p_0}^2 + {q_0}^2 = 0$$

بالتعويض عن x_0, y_0, z_0 نحصل على :

$$-v^2 - {p_0}^2 + {q_0}^2 = 0$$

وهذا يتضمن $p_0 = -\mathrm{v}$, ${q_0}^2 = 2v^2$ أو $q_0 = \mp\sqrt{2}v$

ثالثا : حل معادلات بدلالة القطاع المميز بدلالة $\mathrm{v, t}$

بفحص المعادلات المميزة نجد أن:

$$\frac{dx}{dt} = 2\frac{dp}{dt} \quad \Rightarrow \quad x = 2p + c$$

وبتطبيق الشروط الابتدائية نجد أن :

$$x = 2p + 4v$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad y = -2q + c$$

وبتطبيق الشروط الإبتدائية نحصل على:

$$y = -2q - 2\sqrt{2}v$$

$$\frac{dp}{dt} - \frac{dq}{dt} = -(p - q) \quad \Rightarrow \frac{d(p-q)}{p-q} = -dt$$

وبعد إجراء التكامل نحصل على العلاقة:

$$p - q = ce^{-t}$$

وبتطبيق الشروط الإبتدائية $(q_0 = -\sqrt{2}v)$

$$p - q = (\sqrt{2} - 1)ve^{-t}$$

كذلك

$$\frac{dp}{dt} + \frac{dq}{dt} = -(p + q) \quad \Rightarrow \frac{d(p+q)}{p+q} = -dt$$

وبتكامل المعادلة السابقة نحصل على:

$$p + q = ce^{-t}$$

وبتطبيق الشروط الإبتدائية نجد أن:

$$p + q = -(1 + \sqrt{2})ve^{-t}$$

رابعاً : توجد x, y, p, q بدلالة v ,t

يمكن الحصول على ذلك بحل منظومة المعادلات الآتية أنيا:

$$x - 2p = 4v$$

$$y + 2q = -2\sqrt{2}v$$

$$p - q = (\sqrt{2} - 1)ve^{-t}$$

$$p + q = -(1 + \sqrt{2})ve^{-t}$$

بجمع آخر معادلتين نحصل على:

$$2p = -2ve^{-t} \qquad \Rightarrow p = -ve^{-t}$$

وبطرح المعادلة الثالثة من الرابعة نجد أن:

$$q = -\sqrt{2}ve^{-t}$$

وبالتعويض عنp في المعادلة الأولى:

$$x = -2ve^{-t} + 4v \quad (24)$$

وبالتعويض عن q في المعادلة الثانية:

$$y = 2\sqrt{2}ve^{-t} - 2\sqrt{2}v \quad (25)$$

خامساً : نوجد حل المعادلة $\frac{dz}{dt} = -2z$:

وبعد إجراء التكامل نجد أن :

$$z = ce^{-2t}$$

وبتطبيق الشروط الابتدائية نحصل على العلاقة التالية:

$$z = -v^2e^{-2t}$$

سادساً: نوجد t ,v بدلالة x ,y:

من المعادلتين (24)،(25) واضح أن:

$$y + \sqrt{2}x = 2\sqrt{2}v \quad (26)$$

$$x + \sqrt{2}y = 2v\, e^{-t} \quad (27)$$

من المعادلة (26) نجد أن:

$$v = \frac{y + \sqrt{2}x}{2\sqrt{2}}$$

ومن المعادلة(27) نحصل على:

$$e^{-t} = \frac{\sqrt{2}x + 2y}{y + \sqrt{2}x}$$

وبالتعويض عنv, e^{-t} في المعادلة $z = v^2e^{-2t}$ نحصل على السطح المطلوب وهو:

$$4z + (x + \sqrt{2}x)^2 = 0$$

3- **طريقة جاربت**

وهي معادلة تفاضلية جزئية لاخطية من الرتبة الأولى في المتغير المعتمدz والمتغيرين المستقلينx, y في الصورة التالية:

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

حيث $q = z_y \;\; p = z_x$

لحل المعادلة اعلاه نفرض المعادلة التفاضلية $\phi(x, y, z, p, q) = 0$

نشتق كلا من المعادلتين بالنسبة لـــ x فنحصل على⇐

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$\sin ce \frac{\partial x}{\partial x} = 1, \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (28)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$\sin ce \frac{\partial x}{\partial x} = 1, \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + p\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (29)$$

نشتق المعادلتين الاصليتين بالنسبة لـ y فنحصل على ⇐

$$\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad (30)$$

Libyan Open University Journal of Applied Sciences (LOUJAS)
Volume 2 - Issue 1 - 2026 - Pages 465-474

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}+q\frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{\partial\phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0 \qquad (31)$$

من المعادلتين (28) و(29) نحصل على أن:

$$-f_p\frac{\partial p}{\partial x}=f_x+pf_z+f_qq_x$$

$$-\phi_p\frac{\partial p}{\partial x}=\phi_x+p\phi_z+\phi_qq_x$$

وبقسمة المعادلتين الأخيرتين تكون:

$$\frac{f_p}{\phi_p}=\frac{f_x+pf_z+f_qq_x}{\phi_x+p\phi_z+\phi_q q_x}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين⇐

$$\phi_pf_x+p\phi_pf_z+q_x\phi_pf_p-f_p\phi_x-pf_p\phi_z-q_xf_p\phi_q=0$$

$$\phi_pf_x-f_p\phi_x+p\left(\phi_pf_z-f_p\phi_z\right)+q_x\left(\phi_pf_q-f_p\phi_q\right)=0 \qquad (32)$$

$$q_x=\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

وبنفس الطريقة تحصل من كل من المعادلتين(30)و(31) على ما يلي:

$$(f_y\phi_q-\phi_yf_q)+q(f_z\phi_q-\phi_zf_{q)})+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\left(f_p\phi_q-f_q\phi_p\right)=0 \qquad (33)$$

ويجمع المعادلتين(32) و(33) نحصل على⇐

$$f_y\phi_q+\phi_pf_x-f_p\phi_x-\phi_yf_q+q\left(f_z\phi_q-\phi_zf_q\right)+p\left(\phi_pf_z-f_p\phi_z\right)=0$$

$$\Rightarrow -f_p\phi_x-f_q\phi_y-\phi_z\left(qf_q+pf_p\right)+\phi_p(f_x+pf_z)+\phi_q\left(f_y+qf_z\right)=0 \qquad (34)$$

وهذه المعادلة الأخيرة من صيغة لاكرانج ولكن بخمسة متغيرات x,y,z,p,q للدالة $\phi(x,y,z,p,q)$
وعليه تكون المعادلات التابعة لها هي (Sneddon1957):

$$\frac{dx}{-f_p}=\frac{dy}{-f_q}=\frac{dz}{-qf_q-pf_p}=\frac{dp}{f_x-pf_z}$$

$$=\frac{dq}{f_y-qf_z}=\frac{d\phi}{0}$$

وهي معادلات جاريت التابعة للمعادلة$f(x,y,z,p,q)=0$ حيث يعتبر البسط صفرا عندما يكون مقامة كذلك

طريقة الحل

1- إيجاد المعادلات المميزة للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاء.
2- إيجاد p او q أو كلاهما بدلالة المتغيرات x,y,z أو بعضها أو إيجاد علاقة بينهما .
3- إذا وجدت q, p بدلالة المتغيرين x,y فقط فإنه يمكن الحصول على الحل التام بالتعويض عن q, p في المعادلة التفاضلية الجزئية.
4- إذا وجدت p او q بدلالة المتغيرات x,y,z فإنه يمكن الحصول على الحل التام بتكامل المعادلة:

$$dz=p(x,y,z)dx+q(x,y,z)dy$$

مثال:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$2zx-px^2-2qxy+pq=0$$

الحل:

نلاحظ أن المعادلة من الصيغة$f(x,y,z,p,q)=0$

$$\Rightarrow f_x=2z-2px-2qy,f_y=-2qx,f_z=2x$$

$$f_p=-x^2+q,f_q=2xy+p$$

$$\because \frac{dx}{-f_p}=\frac{dy}{-f_p}=\frac{dz}{qf_q-pf_p}=\frac{dp}{f_x+pf_z}=\frac{dq}{f_y+qf_z}=\frac{d\phi}{0}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x^2-q}=\frac{dy}{2xy-p}=\frac{dz}{x^2p-pq+2xyq-pq}=$$

$$\frac{dp}{2z-2px-2qy+2xp}=\frac{dq}{-2qx+2xq=0}\,then\ dq=0$$

$$\xrightarrow{\text{بالتكامل}} \int dq = \int 0 \Rightarrow q = a$$

نعوض بالمعادلة الأصلية المراد حلها⇐

$$\Rightarrow 2zx - px^2 - 2axy + ap = 0$$
$$\Rightarrow 2zx - 2axy = px^2 - ap$$
$$\Rightarrow p = \frac{2zx - 2axy}{x^2 - a} \Rightarrow p = \frac{2axy - 2zx}{a - x^2}$$

بأخذ المعادلة الأولى وتضرب الحد الأول في p والثاني في q ⇐ونجمع الحدين ثم

نساويه بالحد الثالث ⇐ $\frac{pdx+qdy}{x^2\,p-pq+2xyq-pq}$

$$\frac{dz}{x^2p - pq + 2xyq - pq} \Rightarrow pdx + qdy = dz$$

نعوض عن قيمةp المستخرجة و q= a ⇐

$$\frac{2axy - 2zx}{a - x^2}dx + ady = dz$$
$$\Rightarrow \frac{2x(ay - z)}{a - x^2}dx = dz - ady$$

بقسمة الطرفين على $(ay - z)$ ⇐

$$\Rightarrow \frac{2x}{a - x^2}dx = \frac{dz - ady}{ay - z}$$

يضرب المعادلةب(-1)⇐

$$\frac{-2x}{a - x^2}dx = \frac{dz + ady}{ay - z}$$
$$\Rightarrow \frac{-2x}{a - x^2}dx = \frac{ady - dz}{ay - z}$$
$$\xrightarrow{\text{التكامل}} \mathrm{In}(\mathrm{a} - x^2) = \mathrm{In}(ay - z) + c$$
$$\Rightarrow a - x^2 = (ay - z)c_1 \qquad ,c_1 = e^c$$

توجد بعض المعادلات التفاضلية الجزئية اللاخطية من الرتبة الأولى يمكن بتعويض مناسب تحويلها إلى احدى الحالات الأربعة.

ومن التحويلات المهمة هي:

1- عند ظهور الحد px او قواه في المعادلة يستخدم التحويل: $X = Inx$

2- عند ظهور الحد qy أو قواه في المعادلة يستخدم التحويل Y = In y

3- عند ظهور الحد$\frac{q}{z}$ او $\frac{p}{z}$ اوقواهما في المعادلة يستخدم التحويل Z In z

$$px + qy = z$$
$$x = Inx \;\; y = Iny$$
$$\Rightarrow \mathrm{p} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{1}{x} \Rightarrow px = \frac{\partial z}{\partial x}$$
$$\Rightarrow \mathrm{q} = \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{1}{y} \Rightarrow qy = \frac{\partial z}{\partial y}$$

تحل على الصيغة $\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z \Rightarrow f(p, q, z) = 0$

$$\Rightarrow u = x + ay \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}; \frac{\partial z}{\partial y} = a\frac{dz}{du}$$
$$\Rightarrow \frac{dz}{du} + a\frac{dz}{du} = z \Rightarrow (1 + a)\frac{dz}{du} = z$$
$$\Rightarrow (1 + a)\frac{dz}{z} = du \Rightarrow u = (1 + a)In\,z + z + c$$
$$\Rightarrow u = In\,z^{(a+1)} + In\,b, c = In\,b$$
$$\Rightarrow e^u = bz^{a+1} \Rightarrow e^{ax+by} = bz^{a+1}$$
$$\Rightarrow e^{Inx+aIny} = bz^{a+1} \Rightarrow xy^a = bz^{a+1}$$

الخاتمة

تُعدّ الطرق التحليلية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية وغير الخطية من الأدوات الأساسية في الرياضيات التطبيقية والفيزياء والهندسة، لما توفره من فهم عميق لسلوك الظواهر الطبيعية والنماذج الرياضية فالطرق التحليلية في الحالة الخطية، مثل فصل المتغيرات وتحويلات فورييه ، تتيح الحصول على حلول دقيقة تساعد في تفسير العديد من الظواهر بشكل مباشر وواضح. أما في حالة المعادلات غير الخطية، فإن تعقيدها يجعل الحلول التحليلية أكثر صعوبة، مما يدفع إلى استخدام تقنيات متقدمة أو حلول تقريبية، مع ذلك تبقى هذه الطرق ضرورية لفهم البنية العامة للسلوك الديناميكي للمعادلات وبشكل عام، فإن دراسة هذه الطرق لا تقتصر على إيجاد الحلول فقط، بل تمتد إلى تحليل خصائصها واستقرارها وتفسير النتائج الفيزيائية المرتبطة بها، مما يجعلها أداة محورية في تطوير العلوم الحديثة وفهم النماذج المعقدة .

المراجع

أولاً:المراجع العربية

1.بوقفة، إ.، والهنادوة، ع .(2001) *.المعادلات التفاضلية العادية: حلول وتطبيقات* .جامعة العلوم والتكنولوجيا.
2.جهيمة، ر. م.، وهب الريح، أ. ع. ع .(1993) *.التفاضل والتكامل*.
3.رانفيل، إ. د.، وبيدبنت، ف. أ .(1992) *.المعادلات التفاضلية الأولية* .دار الكتب الوطنية.
4.صالح، ع. أ. ف.، عبده، ع. ش. ف.، والعويضي، ح. م .(2010) *.المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها* .دار الفكر العربي.
5.هب الريح، أ. ع. ع .(2004) *.أساسيات المعادلات التفاضلية الجزئية: الجزء الأول* (ط. 1). دار ومكتبة الشعب للنشر والتوزيع.

ثانياً: المراجع الأجنبية

1.Hilal, E. M. A., & Elzaki, T. M. (2014). Solution of nonlinear partial differential equations by new Laplace transform variational iteration method. *Journal of Function Spaces*, *2014*, Article 790714.
2.Petrovski, I. G., & Silverman, R. A. (1973). *Ordinary differential equations*.
3.Sneddon, I. N. (1957). *Elements of partial differential equations*. McGraw-Hill Book Company.
4.Trim, D. W. (1990). *Applied partial differential equations*. PWS-Kent Publishing Company.